

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

IX. OSZTÁLY

1. Az $ABCD$ paralelogramma BD átlóján felvesszük az M pontot úgy, hogy $\overrightarrow{BD} = 3 \cdot \overrightarrow{BM}$. Legyen P az a pont, amelyre $2 \cdot \overrightarrow{AP} = 3 \cdot \overrightarrow{AM}$. Igazold, hogy:

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$;

b) $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

c) B, P és C kollineáris pontok!

2. Tekintsünk egy olyan $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ függvényt, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) $f(m+2n) = f(m) + 2f(n)$, bármely páratlan m és n szám esetén;

(ii) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ bármely azonos paritású m és n szám esetén.

a) Számítsd ki: $f(1), f(3)$ și $f(5)$;

b) Igazold a teljes indukció módszerével, hogy $f(2n+1) = 2n+1, (\forall) n \in \mathbb{N}$ esetén!

Gazeta Matematică 7-8-9/2010, módosított változat

3. Az $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{N}^*$ halmazt „aritmetikus”-nak nevezzük, ha az egyik eleme a másik kettőnek a számtani közepe.

(Például a $\{3, 10, 17\}$ halmaz „aritmetikus”, mert: $10 = \frac{3+17}{2}$).

Tekintsük az $M = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$ halmazt.

i) Igazold, hogy az $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{N}^*$ halmaz akkor és csak akkor „aritmetikus”, ha

$A = \{a, a+r, a+2r\}$ alakú, ahol $a, r \in \mathbb{N}^*$.

ii) Határozd meg az M halmaz „aritmetikus” részhalmazainak számát!

4. Egy téglalap alakú csokoládé vízszintes és függőleges vonalakkal kisebb téglalapokra van osztva (amelyeket „kockácskák”-nak fogunk nevezni).

a) Cătălin egy késsel elvágja a csokoládét úgy, hogy a vágás átmenjen a téglalap középpontján. Igazold, hogy két egyenlő területű darabot fog kapni, függetlenül a vágás helyzetétől!

b) Feltételezzük, hogy a csokoládéból hiányzik egy tetszőleges helyzetű „kockácska”. Hogyan járjon el Cătălin ebben az esetben, ha egyetlen vágással két egyenlő területű darabra akarja osztani a csokoládét?

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

X. OSZTÁLY

1. Az A és B helységek között 54 km a távolság. Cătălin elindul az A helységből a B helység irányába, és megtesz egy 24 km-es útszakaszt egyenletes sebességgel. Aztán pihen egy órát, végül az indulás után 14 órával érkezik a B helységbe úgy, hogy a második útszakaszon kétszer akkora sebességgel megy, mint az elsőn. Határozd meg Cătălin sebességét az első útszakaszon!

2. Adottak az $x, y, z \in (1, +\infty)$ és $a > 0$ valós számok. Igazold, hogy:

a) $\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \sqrt{xy}$;

b) $a + \frac{1}{a} \geq 2, (\forall) a \in (0, \infty)$;

b) $\log_x \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \log_y \frac{z^2 + x^2}{z + x} + \log_z \frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq 3$.

3. Adottak az $a, b, c \in (0, \infty)$ valós számok.

a) Igazold, hogy ha $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+ab} = \frac{1}{2}$, akkor $a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a + b - 1 = 0$;

b) Bontsd tényezőkre az $E(a, b) = a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a + b - 1$ kifejezést!

c) Oldd meg a valós számok halmazán az $\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+3^x} - \frac{1}{1+6^x} = \frac{1}{2}$ egyenletet!

Gazeta Matematică 10/2010, módosított változat

4.

a) Adottak a $z_1 = a + ib$ és $z_2 = b + ia$, 1 modulusú komplex számok. Igazold, hogy $z_2 = \frac{i}{z_1}$.

b) Cătălinnak meg kell szoroznia 2011 darab 1 modulusú komplex számot. Tévedésből a szorzat minden tényezőjében felcseréli a valós részt a képzetes rész együtthatójával, és így végső

eredményként az $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ számot kapja. Mi lett volna a 2011 darab komplex szám szorzatának helyes eredménye?

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

XI. OSZTÁLY

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{N})$ mátrixok. Hány ilyen alakú mátrix van, amelyben a főátló elemeinek összege és a mellékátló elemeinek összege is 7?

2. Adott az $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{2-|x-2|}{2+|x-2|}}$ függvény.

a) Határozd meg az f függvény maximális értelmezési tartományát!

b) Tanulmányozd az f függvény folytonosságát ezen a halmazon!

c) Számítsd ki: $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^{\frac{2}{|x-2|}}$;

d) Tanulmányozd a $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^{\frac{2}{x-2}}$ határérték létezését!

3. Cătălin és Simona kódolt üzeneteket küldenek egymásnak, a következő módon:

– az ábécé ékezetek és megkülönböztető jelek nélküli betűihez hozzárendelnek egy-egy egymás utáni számot, minden számot kétszer írnak, váltakozva + és – jellel, az alábbi módon:

A	B	C	D	E	F	G	H	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓
1	-1	2	-2	3	-3	4	-4		12	-12	13	-13

– az üzenetet átírják egy számsorral (amelyben minden zérós szóközt jelöl), és a számsort egy $T \in M_3(\mathbb{Z})$, négyzetes mátrixba rendezik, soronként, az első sorral kezdve a küldést;

– a $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot használják dekódoló „kulcs”-ként, így kapják a $T = C \cdot X$ mátrixot.

Egy nap Simona a KIIAC GOM üzenetet küldte Cătălinnak. Dekódold ezt az üzenetet az X mátrixban olvasható szöveggént!

4. Adottak az $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = \frac{1}{m} \cdot x + m$ függvények, ahol m pozitív racionális paraméter és legyen G_m az f_m függvény grafikus képe.

a) Ha $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$ különböző számok, határozd meg a G_p és G_q grafikus képek metszéspontját!

b) Igazold, hogy ha a, b, c egymás utáni természetes számok, akkor a G_a, G_b és G_c grafikus képek metszéspontjai által meghatározott háromszög területe 1!

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

XII. OSZTÁLY

1. Cătălin véletlenszerűen kiválasztja a \mathbb{Z}_n gyűrű egy elemét. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott elem invertálható, az alábbi esetekben:

a) $n = 12$;

b) $n = 2011$ (2011 prímszám).

2. Egy helység lakossága $P = P(t)$, ahol $P(t)$ a lakosok számát jelenti a t , években kifejezett időpontban. A lakosság növekedési rátája a $P'(t) = t \cdot e^t$ képlettel jellemezhető, ahol $e \approx 2,7$ a természetes logaritmus alapja, $P'(t)$ pedig a P függvény deriváltja. Ha kezdetben (a $t_0 = 0$ időpontban) a lakosok száma 2011 volt, hány lakos lesz abban a helységben 5 év eltelte után?
 $[e^5 = 148,5]$

3. Legyen $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid |ad| + |bc| = 1, |ab| + |cd| = 0 \right\}$.

i) Ha $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, igazold, hogy A, A^2, A^3, A^4, AB és A^2B eleme G -nek!

ii) Határozd meg a G halmaz kardinálisát!

b) Igazold, hogy a G halmaz a mátrixok szorzásával csoportot alkot!.

4. Cătălinnek 100 darab gömb alakú S_1, S_2, \dots, S_{100} tartálya és 10 liter bora van. Tudva, hogy az S_n tartály sugara $r_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ deciméter, minden $n = \overline{1, 100}$ esetén, dönts el, hogy elegendő-e a 10 liter bor mind a 100 tartály teletöltéséhez!

Megjegyzés: Ismertnek tekintjük, hogy az $r > 0$ sugarú gömb térfogata $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.